

Mesures et incertitudes

(Livre p 361 – p 363)

I. Notion d'incertitude

1. Variabilité d'une mesure et erreurs de mesure

Aucune grandeur physique mesurée n'est connue avec exactitude, du fait :

- des erreurs liées à la méthode et/ou à l'instrument utilisés ;
- des variations naturelles de tout phénomène physique.

2. Valeur estimée et incertitude (absolue)

Mesurer une grandeur, c'est rechercher une valeur de cette grandeur et lui associer une incertitude afin d'évaluer la qualité de la mesure.

Soit une grandeur physique dont on cherche à mesurer la valeur x .

A l'issue d'une mesure unique, ou d'une série de mesures dans des conditions identiques, on a obtenu une estimation de x notée $x_{\text{estimée}}$.

Dans le cas d'une série de mesures effectuées dans des conditions identiques, $x_{\text{estimée}} = x_{\text{moyenne}}$ des mesures.

La valeur de x n'est pas connue exactement mais avec une certaine précision ou incertitude (absolue) notée Δx ou $U(x)$ - **U pour uncertainty**.

La valeur x de la grandeur physique mesurée s'exprime de la façon suivante :

$$x = x_{\text{estimée}} \pm \Delta x$$

Grandeur mesurée Valeur mesurée Incertitude de mesure

Dans ce type d'écriture, le dernier chiffre significatif de la valeur mesurée doit être à la même position décimale que le dernier chiffre significatif de l'incertitude.

Cette écriture signifie que la valeur de x appartient à l'intervalle $[x - \Delta x ; x + \Delta x]$ ou $[x - U(x) ; x + U(x)]$. Cet intervalle est appelé « **intervalle de confiance** » dans lequel la probabilité de trouver x est très élevée.

3. Incertitude relative

Afin d'évaluer la qualité d'une mesure sans valeur de référence, on détermine l'incertitude relative

associée à la mesure (ou à la série de mesures). Elle s'exprime de la façon suivante : $\left| \frac{\Delta x}{x_{\text{estimée}}} \right|$ ou $\left| \frac{U(x)}{x_{\text{estimée}}} \right|$.

C'est un nombre positif souvent exprimé en pourcentage.

Plus l'incertitude relative est faible, meilleure est la qualité de la mesure.

II. Evaluation d'une incertitude

1. Cas d'une mesure unique (évaluation de type B)

Évaluer l'incertitude-type lorsque la grandeur est facile à repérer

Souvent, la grandeur mesurée est suffisamment nette et stable pour être repérée sans difficulté. Dans ce cas, on considère que l'incertitude sur la mesure est principalement due à la précision avec laquelle l'instrument permet de lire le résultat.

En première approximation, il est donc possible d'estimer l'incertitude type de la façon suivante :

Pour un **instrument gradué** (règle, thermomètre, pipette, etc.), l'utilisateur identifie la plus petite graduation visible.

L'incertitude-type est égale à la moitié de la plus petite graduation visible :

$$u = \frac{\text{graduation}}{2}$$

Pour un instrument à **affichage numérique** (multimètre, conductimètre, balance, etc.), on identifie le dernier chiffre affiché (digit).

L'incertitude-type est égale à la moitié du dernier chiffre affiché :

$$u = \frac{\text{digit}}{2}$$

EXEMPLES

Mesure de longueur

Un double décimètre est généralement gradué en millimètre, c'est-à-dire que sa plus petite graduation est le millimètre.

En première approximation, l'incertitude-type associée à la lecture sur cette règle est donc :

$$u = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ mm}$$

Remarque : lors d'une double lecture, l'incertitude porte à la fois sur la position initiale et la position finale. Dans ce cas, l'incertitude-type vaut $2 \times 0,5 \text{ mm}$.

Mesure de masse



Une balance utilisée au laboratoire de chimie affiche trois chiffres dont le dernier correspond à 0,1 g.

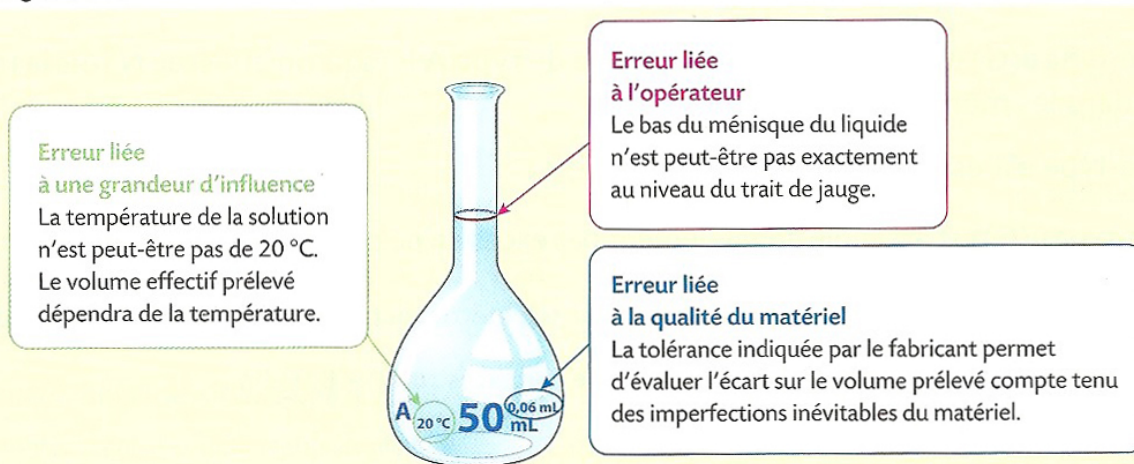
En première approximation, l'incertitude-type associée à la lecture sur cette balance est donc :

$$u = \frac{0,1}{2} = 0,05 \text{ g}$$

Le résultat de cette pesée est donc 85,10 g avec une incertitude-type de 0,05 g.

Exemple 3 :

Lors de la préparation d'une solution dans une fiole jaugée, de volume $V = 50,0 \text{ mL}$, le volume n'est pas exactement égal à 50,0 mL. Il y a plusieurs sources d'erreur :



L'incertitude liée à la qualité du matériel est la tolérance t gravée sur le verre de la fiole jaugée par le constructeur.

L'incertitude absolue sur le volume, pour un niveau de confiance de 95%, est : $U(V) = \Delta V = t$

Pour la fiole jaugée de 50,0 mL ci-dessus, on mesure un volume avec une tolérance : $t = 0,06 \text{ mL}$.

Soit pour cette fiole jaugée : $U(V) = \Delta V = t = 0,06 \text{ mL}$.

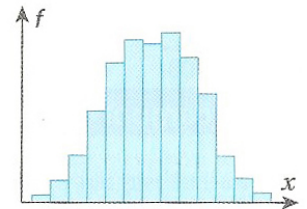
2. Cas d'une série de mesures (évaluation statistique ou évaluation de type A)

Lorsqu'un même opérateur répète plusieurs fois le mesurage d'une même grandeur, dans les mêmes conditions expérimentales, il peut trouver des résultats différents.

Il en est de même pour des opérateurs différents réalisant simultanément le mesurage de la même grandeur avec du matériel similaire.

Dans de tels cas, on utilise des notions de statistiques (moyenne et écart type) pour analyser les résultats.

Soit une grandeur dont on fait un n mesures dans des conditions identiques (**conditions de répétabilité**). Les valeurs sont notées x_i , avec $i = 1, 2, 3 \dots n$. Elles peuvent être représentées graphiquement dans un **histogramme**, qui montre les effectifs f pour chaque valeur ou intervalle de valeurs de x .



Histogramme des effectifs

La valeur estimée de x est la **moyenne** de ces valeurs :

$$x_{\text{estimée}} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Une évaluation de type A de l'incertitude associée à la mesure de x tient compte du caractère groupé ou dispersé des résultats expérimentaux.

Lorsqu'on dispose d'une dizaine de mesures, l'incertitude évaluée de cette manière, nommée parfois **incertitude de répétabilité**, peut se calculer ainsi :

$$\Delta(x) = \frac{2 \cdot \sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$$

où σ_{n-1} est une grandeur statistique nommée **écart-type expérimental** :

$$\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

MaThs

On peut utiliser le signe somme Σ . La moyenne s'écrit :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

L'écart-type expérimental, lui, s'écrit :

$$\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Il est noté $s(x)$ dans les calculatrices.

Exemple :

La mesure Δt de la durée de chute d'un objet depuis une fenêtre a été répétée 16 fois avec un chronomètre de qualité. Les résultats obtenus, exprimés en seconde, sont les suivants :

1,38	1,45	1,41	1,45	1,43	1,41	1,46	1,39
1,43	1,48	1,38	1,44	1,40	1,42	1,39	1,44

La série des valeurs précédentes conduit à une valeur moyenne de durée de chute $\overline{\Delta t}$ de 1,42s et à un écart-type tel que : $\sigma_{n-1} = 0,030s$.

Avec un niveau de confiance de 95%, l'incertitude de répétabilité est :

$$U(\Delta t) = \frac{2 \times \sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} = \frac{2 \times 0,030}{\sqrt{16}} = 0,015s \approx 0,02s$$

La durée de chute est donc : $\Delta t = \overline{\Delta t} + U(\Delta t) = 1,42 \pm 0,02s$ pour un niveau de confiance de 95%.

III. Chiffres significatifs (Rappels)

Soit la valeur x d'une grandeur physique issue d'une mesure ou d'un calcul, mais pour laquelle on ne connaît pas l'incertitude. Plus elle comporte de chiffres, plus elle est connue avec précision.

Tous les chiffres affichés par l'appareil de mesure ou la calculatrice n'ont pas forcément une signification : ils ne sont pas **significatifs**.



Exemple :

Soit une table de longueur $a = 190$ cm et de largeur $b = 94$ cm, mesurées au centimètre près.

L'aire de la table est $S = ab$ et son périmètre est $L = 2(a + b)$.

Pour ces deux calculs, la calculatrice affiche :

$190 \times 94 = 17860$ et $2 \times (190 + 94) = 568$.

Si l'on ne se pose pas de questions, alors on écrit $S = 17\,860$ cm² et $L = 568$ cm. Tous ces chiffres ont-ils une signification ?

Définition d'un chiffre significatif

Un **chiffre significatif** est un chiffre ayant réellement une signification suivant la précision des données ou du calcul.

Pour une valeur en notation scientifique, le **nombre de chiffres significatifs** est le nombre de chiffres qu'il y a dans le nombre avant la puissance de 10.

Les zéros à gauche du premier chiffre non nul, s'il y en a, ne sont pas comptés.

Exemples :

- La longueur de la table est $a = 190$ cm ou, exprimée en mètres $a = 1,90$ m.

Si l'on écrivait $a = 1,9$ m, on ferait comme si a était connue au décimètre près. On perdrait de l'information, le zéro de droite est donc un chiffre significatif.

La largeur de la table est $b = 94$ cm, ou encore $b = 0,94$ m.

Le zéro de gauche n'est pas un chiffre significatif. On pourrait aussi écrire $b = 9,4 \times 10^{-1}$ m sans perdre d'information.

- Quelques exemples :

Valeur	1,670	-15 600	0,035	3×10^4	$2,00 \times 10^{-4}$
Nombre de chiffres significatifs	4	5	2	1	3

Calculs comportant multiplications ou divisions

Le résultat du calcul ne comporte pas plus de chiffres significatifs que la donnée qui en comporte le moins.

Exemple :

$a = 190$ cm est donnée avec **trois chiffres significatifs**.

$b = 94$ cm est donnée avec **deux chiffres significatifs**.

L'aire $S = ab$ doit donc être écrite avec **deux chiffres significatifs**.

La calculatrice donne $190 \times 94 = 17860$.

On écrit donc $S = 1,8 \times 10^4$ cm².

Calculs comportant additions ou soustractions

Le dernier chiffre exprimé du résultat du calcul a le même rang que le dernier chiffre exprimé des données.

Exemple :

a et b sont toutes deux connues au centimètre près. Leur somme, ou le **périmètre** (qui est la somme $a + a + b + b$) sera donc connue au centimètre près. On écrit donc $L = 568$ cm.

Si les données avaient été $a = 1,9$ m et $b = 0,94$ m, comme le rang du dernier chiffre exprimé de a est le **décimètre**, on aurait écrit $L = 5,7 \times 10^2$ cm, ou $L = 57$ dm, au décimètre près.